*Sobre una complejidad absoluta y universal, y una teoría unificada de la complejidad**

On absolute and universal complexity, and a unified theory of complexity

*Luis Álvaro Cadena Monroy***

Resumen

Se discute si es posible encontrar una complejidad (algorítmica, computacional, profundidad lógica, profundidad termodinámica) absoluta y universal, si habría conmensurabilidad entre las estimaciones de complejidad según estas cuatro definiciones de complejidad, y si se puede llegar a hablar de una teoría unificada de la complejidad. Las conclusiones a las que se llega son las siguientes: no se puede llegar a una complejidad absoluta y universal (para los casos estudiados); las estimaciones de complejidad según estas cuatro definiciones son inconmensurables entre sí y, no es posible hablar de una teoría unificada de los sistemas complejos adaptativos (por lo menos para los casos estudiados).

Palabras clave: complejidad algorítmica, complejidad computacional, profundidad lógica, profundidad termodinámica, teoría unificada de la complejidad.

Abstract

In this paper I discuss and conclude that it is not possible to attain an absolute and universal complexity, that commensurability is not possible among the various complexity estimations (algorithmic, computational, logic and thermodynamic) and, therefore, that it is not possible to develop a unified complexity theory.

Key words: algorithmic complexity, computational complexity, logic depth, thermodynamic depth, unified theory of complexity.

Introducción

J. H. Holland[1] afirma que, aunque los sistemas complejos pueden diferir en detalles, no obstante, la coherencia de los cambios de cada uno de estos sistemas resulta ser un enigma a explicar. Este factor común es considerado de suma importancia en el Instituto Santa Fe (NM, USA), tanto, que se agrupa a estos sistemas bajo el nombre de sistemas complejos adaptativos (cas,

* Este artículo es el resultado del proyecto de investigación "Contribución a la discusión sobre si es o no posible contribuir una teoría unificada de los llamados sistemas complejos adaptativos", dentro del grupo de investigación: Bioética, ciencias de la vida, Departamento de Bioética, Universidad El Bosque. Documento entregado el 26 de julio de 2011 y aprobado el 20 de octubre de 2011.

** Biólogo de la Universidad Nacional de Colombia. PhD. Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. Docente – investigador Departamento de Bioética, Universidad El Bosque. Correo electrónico: l_a_cadena_m@yahoo.es

[1] HOLLAND, John. Hidden order: how adaptation builds complexity. Massachusetts: Perseus Books. 1995. p. 4.

en inglés). Según Holland[2], esto es más que una terminología: esto señala la intuición sobre reglas y principios generales para el comportamiento de los cas. El problema es, entonces y según Holland, encontrar estos principios generales. Para empezar, S. Kauffman[3], Investigador del Instituto Santa Fe, sugiere que los sistemas complejos resultan de procesos autoorganizativos. A pesar de los intensos trabajos de la mayoría de los investigadores del mencionado Instituto –que creen en la posibilidad de una teoría unificada de la complejidad-, han llegado a una conclusión que podría parecer desalentadora para ellos: no hay, hasta el momento, una teoría única de los sistemas complejos adaptativos (G. Cowan)[4].

Hace varios años, y en un estudio crítico de los trabajos realizados por varios miembros del Instituto Santa Fe, J. Horgan[5] muestra cómo diversos argumentos esgrimidos en esos trabajos, no tienen naturaleza tan general como pretendían en un comienzo sus autores: la teoría universal parece estar más en el corazón de estos investigadores que ser un resultado concreto de investigación.

¿Puede tenerse una teoría única de los llamados sistemas complejos?

Dentro de este contexto, en la actualidad, se presentan dos propuestas con respecto a los llamados sistemas complejos. Una propuesta sugiere que es posible llegar a una teoría unificada de todos los sistemas complejos. Otra propuesta indicaría que no es posible una teoría unificada de la complejidad, pues no se podría buscar un "criterio mágico" que explique todas las marañas de la naturaleza (R. Landauer)[6]. Nos ubicamos desde la perspectiva de renunciar a tal unificación, y admitir que sólo es posible desarrollar definiciones y teorías de complejidad válidas para conjuntos restringidos de sistemas.

Es dentro de esta coyuntura que se ubica la presente propuesta: contribuir en el esclarecimiento sobre si es posible o no hablar de una única teoría de los sistemas complejos, válida para todos los llamados sistemas complejos adaptativos.

Uno de los primeros problemas que surge al hablar de sistemas complejos es el de cómo medir su complejidad. Se han hecho diversas propuestas y definiciones de complejidad. En 1994 R. Wackerbauer y otros[7] presentaron una clasificación de diferentes medidas de la complejidad. Desde 1995 decía J. Horgan[8], citando a Seth Lloyd, que había, al menos y por aquel entonces, treinta definiciones de complejidad. Por supuesto, y en lo que a continuación sigue, no veremos todas estas definiciones. Nos limitaremos a ver algunas de las más importantes definiciones de complejidad.

Analizaremos el problema de la posibilidad de una definición universal de complejidad primero, a partir de diferentes formas de estimar la complejidad y, segundo, a partir de las propias definiciones de complejidad. Consideraremos cuatro definiciones de complejidad, y sus correspondientes formas de estimar la complejidad: la complejidad algorítmica, la complejidad computacional, la profundidad lógica y la profundidad termodinámica. Aquí estamos interesados en objetos macroscópicos –compuestos de miles, millones de moléculas, interactuando dinámicamente entre sí– cuyos elementos interactúan por medio de relaciones

---

[2] Ibídem., p. 4.

[3] KAUFFMAN, Stuart. Investigations. Oxford: Oxford University Press, 2000. p. 2.

[4] COWAN, George. Conference Opening Remarks. En: COWAN, George; PINES, David y MELTZER, David (Editores). Complexity: metaphors, models, and reality. Cambridge: Perseus Books, Cambidge, 1999. pp. 1–4.

[5] HORGAN, John. De la complejidad a la perplejidad. *Investigación y Ciencia* (227): 71–77, 1995.

[6] Ibídem., p. 72.

[7] WACKERBAUER, R., et. all. A comparative classification of complexity measures. *Chaos, Solitons and Fractals*, 4, (1): 133–173, 1994.

[8] HORGAN, John. Op. cit., p. 74.

lineales y no lineales, y que están inmersos dentro de procesos irreversibles, que presentan procesos de autoorganización y la emergencia de nuevas propiedades.

Complejidad algorítmica.

A la complejidad algorítmica se le llama, a veces, complejidad de Solomonoff — Kolmogorov — Chaitin. Por brevedad, M. Li y P. Vitányi[9] la llaman complejidad de Kolmogorov. Presentaré los elementos fundamentales de esta teoría desde el lenguaje de las máquinas de Turing.

A continuación, se indican unas definiciones y teoremas (sin demostraciones) fundamentales de la teoría de la complejidad algorítmica, recurriendo -principalmente- a la presentación de G. Chaitin[10].

Se habla de máquina de Turing T o computador C como una función parcial recursiva que tiene como dominio un código instantáneo (o autodelimitante, es decir, que tiene información sobre su propia longitud). El computador o máquina de Turing calcula una cadena binaria (s) y la escribe en una cinta llamada de trabajo, a partir de otra cadena binaria (el programa, p) escrita en la llamada cinta del programa de computador.

Ahora bien, puede haber una enumeración recursiva de los programas autodelimitantes de computador. Con esto, podremos construir una máquina de Turing universal (U) o computador universal (U), que puede calcular cualquier cadena binaria a partir del índex o numeral del programa de computador que le corresponde a la cadena binaria en cuestión. El computador universal puede efectuar el cálculo de cualquier computador C no universal, con la diferencia (con relación a la del computador C) de que en su programa va una serie de dígitos adicionales correspondiente a la enumeración autodelimitante del programa de computador C. Esos dígitos adicionales corresponden a lo que en las ecuaciones se presenta como la constante sim (C). Podemos representar mediante |s|, o mediante |p| a las longitudes (o número de bits) de la cadena binaria s o del programa p, respectivamente.

Para los desarrollos que vienen a continuación, se tomará un computador universal, U, como patrón.

Definiciones de complejidad[11]

$K_c(s) = \min |p| \, (C(p, \Lambda) = s)$, puede ser ∞.

$K_c(s/t) = \min |p| \, (C(p, t^*) = s)$, puede ser ∞.

$K(s) = K_U(s)$.

$K(s/t) = K_U(s/t)$.

La primera definición de complejidad, $K_c(s) = \min |p| \, (C(p, \Lambda) = s)$, se lee: la complejidad de la cadena binaria s, según el computador C, es el número de bits del programa p de menor longitud (o programa más corto) tal que C, con la cinta de trabajo en blanco ( ), y con el programa p, calcula s.

La segunda definición de complejidad, $K_c(s/t) = \min |p| \, (C(p, t^*) = s)$, es la complejidad de la cadena binaria s, según el computador C, teniendo en la cinta de trabajo el programa más corto de la cadena binaria t.

En ambos casos, $K(s) = K_U(s)$, $K(s/t) = K_U(s/t)$, se está afirmando que la complejidad algorítmica

9 LI, Ming y VITÁNYI, Paul. An introduction to Kolmogorov complexity and its applications. Tercera edición. New York: Springer, 2008. p. viii.

10 CHAITIN, Gregory. A theory of program size formally identical to information. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 22 (3): 229-340, 1975. Ver también, CHAITIN, Gregory. Algorithmics information theory. 3rd printing (with revisions). Cambridge: Cambridge University Press, Cambridge, 1990. 234p.

11 Tomadas, con modificaciones de nomenclatura, de: CHAITIN, Gregory. Op. cit., 1975. p. 331. Ver también CHAITIN, Gregory. Op. cit., 1990. p. 108.

de la cadena binaria s es aquella estimada a partir del computador universal.

Se indican a continuación algunos de los teoremas que resultan de las anteriores definiciones[12].

$K(s) \leq K_c(s) + sim(C)$

Según este teorema, la complejidad de la cadena binaria s, estimada por un computador cualquiera C, difiere de la complejidad de la misma cadena binaria s, estimada por el computador universal U, en una constante, sim(C), que depende del numeral o "índex" del computador C (codificado de forma autodelimitante) en la enumeración recursiva: si i es el numeral de C_i, entonces, $sim(C) = 2|i| + 1$ bits.

$K(s/t) \leq K_c(s/t) + sim(C)$

El significado de este teorema difiere del anterior únicamente en que en la cinta de trabajo se encuentra la cadena binaria t[13].

Estos dos teoremas pueden ser considerados como el fundamento sobre el cual se construye la teoría de la complejidad[14].

Kolmogorov recalcó[15] que toda esta teoría sobre las longitudes de los programas no tendría razón de ser, si no se hubiese construido una jerarquía de métodos de cálculo de cadenas binarias con ciertas propiedades. Esta jerarquía, para tener sentido, tiene que tener un único mínimo elemento: la clase de equivalencia de métodos de cálculo que "minoriza" todos los otros métodos de cálculo. Al definir de manera universal la complejidad de cadenas binarias se elimina el aparente relativismo de las definiciones. Esto lleva a hablar de la complejidad absoluta de las cadenas binarias. En consecuencia, la complejidad sería una propiedad de la cadena binaria, y no del método de cálculo que se use para especificarla o calcularla[16].

Complejidad computacional

Los elementos fundamentales de la complejidad computacional se presentan en O. Watanable (Ed.). Para la definición de complejidad computacional, se seguirá a Li y Vitányi.[17]

Definición (Complejidad computacional):

Sea T una máquina de Turing. Para cada entrada (input) de longitud n, si T realiza, al menos, t(n) movimientos antes de que se detenga, entonces, decimos que T ejecuta en un tiempo t(n), o que tiene una complejidad de tiempo t(n). Si T usa, al menos, s(n) espacios en el referido cálculo, entonces, decimos que T usa un espacio s(n), o que tiene una complejidad de espacio s(n).

Profundidad lógica

Esta definición de complejidad es debida a Ch. Bennett[18]. Aquí continuaremos con la notación y el planteamiento de Li y Vitányi para la profundidad lógica[19].

Formalmente, es el tiempo requerido por un computador universal para calcular el objeto a partir de su descripción original comprimida.

Definición:

La profundidad de una cadena x en el nivel de

12 Sin demostración; tomados con modificaciones de nomenclatura de: CHAITIN, Gregory. Op. cit., 1975. p. 332. Ver también CHAITIN, Gregory. Op. cit., 1990. p. 110.

13 Tomado con modificaciones de nomenclatura de: CHAITIN, Gregory. Op. cit., 1975. p. 332. Ver también, CHAITIN, Gregory. Op. cit., 1990. p. 110.

14 KOLMOGOROV, Andréi. Three approaches to the quantitative definition of information. *Problemy Pederachi Informatsii*, IT-14 (5): 1965, p. 7.

15 LI, Ming, y VITÁNYI, Paul. Op. cit., p. 103.

16 LI, Ming, y VITÁNYI, Paul. Op. cit., p. 103.

17 LI, Ming, y VITÁNYI, Paul. Op. cit., pp. 37 y ss.

18 BENNETT, Charles. Logical depth and physical complexity. En: HERKEN, Rolf (Editor). The universal Turing Machine: a half century survey. Oxford: Oxford University Press, 1988. pp. 227–258.

19 LI, Ming, y VITÁNYI, Paul. Op. cit., pp. 589 y ss.

significancia $\in = 2^{-b}$ es:

Profundidad$_\in$(x) = min{t : $Q_U^t(x)/Q_U(x) \geq \in$},

en donde $Q_U^t(x) = \sum_{U^t(p)=x} 2^{-l(p)}$, y $U^t(p) = x$ significa que U calcula x en t pasos y se detiene. Una cadena x tiene una profundidad (d, b) si d = profundidad$_\in$(x) y $\in = 2^{-b}$.

Profundidad termodinámica.

Esta definición de complejidad la propusieron L. Lloyd y H. Pagels. Lo mismo que la profundidad lógica, la profundidad termodinámica debería ser baja para sistemas muy aleatorios, como los gases, y para sistemas muy ordenados, como los cristales.[20]

Lloyd y Pagels proponen que la complejidad de un estado macroscópico es determinada por la historia que lleva a ese estado macroscópico. Según ellos, la complejidad debe ser una función del proceso que desemboca en el objeto particular. En general, la medida de la complejidad debe reflejar la dificultad de reunir en uno solo, una serie de objetos.[21]

Si la incertidumbre de cómo se alcanza un estado macroscópico es baja, y si las trayectorias para alcanzar dicho estado están confinadas dentro de "espacios" estrechos, entonces, ese estado macroscópico es fácil de alcanzar y será simple y de baja profundidad termodinámica. Por el contrario, si la incertidumbre histórica es grande, y si un rango amplio de alternativas históricas ha sido excluido, entonces, el proceso es complejo y el estado macroscópico será profundo[22]. En palabras de Lloyd y Pagels, la profundidad termodinámica de un estado s es proporcional a la cantidad de información que se necesita para identificar la trayectoria que lleva a s, dada la información que se tiene sobre que el sistema esté en el estados[23].

Objetivos

Objetivo general

Contribuir en la discusión sobre si puede alcanzarse una teoría unificada de la complejidad de los llamados sistemas complejos. Para esta contribución, se estudiarán cuatro definiciones de complejidad.

Objetivos específicos:

1. Analizar si habría una complejidad algorítmica universal y absoluta.
2. Analizar si habría una complejidad computacional universal y absoluta.
3. Analizar si habría una profundidad lógica universal y absoluta.
4. Analizar si habría una profundidad termodinámica universal y absoluta.
5. Analizar si la complejidad de un "mismo objeto", según la complejidad algorítmica, la complejidad computacional, la profundidad lógica, y la profundidad termodinámica son conmensurables entre sí.
6. A partir de los resultados a los que se llegue luego del desarrollo de los anteriores objetivos, se analizará si es posible hablar de una teoría unificada de los llamados sistemas complejos adaptativos (por lo menos, en los casos estudiados).

1. Metodología

1.1 El primer objetivo (específico) se efectuará dentro de la perspectiva de considerar la

[20] LLOYD, Seth y PAGELS, Heinz. Complexity as thermodynamics depth. *Ann. Phys*. 188 (1): 1988, p. 189.

[21] Ibídem., p. 187/189.

[22] CRUTCHFIELD, James y SHALIZI, Cosma. Thermodynamic depth of causal states: objective complexity via minimal representations. *Physical Review E*, 59 (1): 1999, pp. 59-60.

[23] LLOYD, Seth y PAGELS, Heinz, Op. cit., p. 196.

complejidad algorítmica de un "mismo objeto" desde "teorías" diferentes. Por otro lado, y según los resultados a que se llegue por este camino, nos introduciremos en las enumeraciones recursivas universales de n variables, para considerar si puede variar la complejidad algorítmica del "mismo objeto" según enumeraciones recursivas universales de igual o diferente número de variables al de la enumeración estándar.

1.2 El segundo objetivo se llevará a cabo dentro de la perspectiva de las definiciones de complejidad computacional según el tiempo o el espacio de computación, es decir se considerarán los efectos del cambio de computador en la complejidad computacional de un "objeto" (o problema).

1.3 En tercer objetivo se considerará como sistema complejo un ser vivo, y se considerarán –para la profundidad lógica- los casos de "evolución" ontogénica y evolución filogenética, partiendo de las mismas "condiciones iniciales". Por otro lado, se considerarán dos filogenias diferentes para el mismo tipo de organismo con relación a la profundidad lógica.

1.4 En cuarto objetivo se considerarán el comportamiento de la profundidad termodinámica al redefinir los estados y su número en la trayectoria, o cambiar el estado inicial.

1.5 A partir de los resultados anteriores, se acudirá al teorema de la computabilidad en la complejidad algorítmica para introducir el problema del cálculo de la complejidad de un objeto a partir de la complejidad de otro objeto. Después, y con base en lo anterior, se compararán las cuatro formas de encontrar la complejidad según sus definiciones, y se precisará si los resultados de la estimación de la complejidad de un "mismo objeto" pueden ser obtenidos de una, a otra forma de estimar la complejidad.

1.6 El resultado de la conmensurabilidad o de la inconmensurabilidad en la estimación de la complejidad entre las mediciones de la complejidad según las diferentes definiciones de complejidad aquí estudiadas, y las mismas definiciones de complejidad, permitirán precisar si puede haber o no una teoría unificada de la complejidad para los llamados sistemas complejos adaptativos (en los casos estudiados).

2. Resultados y discusión de resultados

2.1 Complejidad Algorítmica

La complejidad algorítmica tiene dos pretensiones: la de la universalidad, por ello acude al computador universal, o máquina universal de Turing, y la del carácter absoluto, por ello habla del programa mínimo de computador que permite calcular la cadena binaria en cuestión. Vamos a iniciar el análisis del problema de diferentes resultados de estimación de la complejidad algorítmica de un mismo objeto. Para ello, analizaremos dos casos: uno, que llamaremos "teorías" u operaciones con naturales; otro, en el que abordaremos las geometrías, euclidiana y no euclidianas.

2.1.1 Complejidad algorítmica y "teorías" (operaciones) suma, multiplicación y potenciación

En primer término, veremos algo que llamaremos "teorías": teoría de la suma, teoría de la multiplicación y teoría de la potenciación, y lo haremos pensando en el proceso histórico (del pasado hacia tiempos más actuales) en el cual se recorrió el camino de la primera a la última. Veamos cómo se comportaría la complejidad algorítmica de un "mismo objeto", según las aquí llamadas tres teorías: suma, multiplicación y potenciación (por ejemplo, un natural escrito como una cadena binaria, según un ordenamiento lexicográfico[24], que vamos a llamar por comodidad output, partiendo de

[24] Véase LI, Ming y VITÁNYI, Paul. Op. cit., p. 12.

una misma cadena binaria, que resulta ser otro natural escrito lexicográficamente, y que vamos a llamar input).

• Input: 2, output: 4 (este será nuestro objeto n_1).

o "Teoría" suma: 2 + 2 = 4 (un paso).

o "Teoría" multiplicación: 2 × 2 = 4 (un paso).

o "Teoría" potenciación: $2^2 = 4$ (un paso).

.

.

.

• Input: 3, output: 27 (este será nuestro objeto n_2).

o "Teoría" suma: 3 + 3 +… + 3 = 27 (8 pasos).

o "Teoría" multiplicación: 3 × 3 × 3 = 27 (2 pasos).

o "Teoría" potenciación: $3^3 = 27$ (1 paso).

• Input: 6, output: 46656 (este será nuestro objeto n_5).

o "Teoría" suma: 6 + 6 +… + 6 = 46656 (7775 pasos).

o "Teoría" multiplicación: 6 × 6 ×…× 6 = 46656 (5 pasos).

o "Teoría" potenciación: $6^6 = 46656$ (1 paso).

.

.

.

• Input: 10, output: 10000000000 (este será nuestro objeto n_{10}).

o "Teoría" suma: 10 + 10 +… 10 = 10000000000 (999999999 pasos).

o "Teoría" multiplicación: 10 × 10 ×… × 10 = 10000000000 (9 pasos).

o "Teoría" potenciación: $10^{10} = 10000000000$ (1 paso).

Es necesario hacer una aclaración, antes de interpretar lo anterior: en el caso de la "teoría suma", no habría un solo paso al decir sume 10, 999999999 veces, porque este último número, en la "teoría" suma, es muy difícil de alcanzar: se requeriría de muchos pasos para poder alcanzar por medio de la sola "teoría" suma 999999999.

En consecuencia, **si seguimos el proceso histórico desde la suma hacia la potenciación**, veremos que, con el mismo input, e igual output, los programas mínimos, para cada caso, serán diferentes, siendo el menos complejo el de la potenciación (actualmente sería el más corto: en la potenciación, algunos números "grandes" no son tan complejos como en la suma, pues se los puede alcanzar por medio de programas cortos). La complejidad algorítmica estimada (históricamente) será diferente en los tres casos. Algún seguidor de la complejidad algorítmica absoluta podría decir que, en estos tres casos, la complejidad del objeto será la de la potenciación, o podría decir que la suma, para el ejemplo, no sería más que un algoritmo reiterado. No obstante, si se tiene en cuenta la historia, se debería admitir que, antes de existir la multiplicación y la potenciación, llegar a un número grande a través de la suma reiterada sería un proceso bastante dispendioso, y largo, que implicaría una complejidad algorítmica muy elevada. En este caso, el algoritmo no podría ser: "a 10 súmele 10, luego 10 y así sucesivamente hasta completar 999999999 operaciones" porque, ya se dijo, 999999999 es un número difícil de alcanzar desde la "teoría" suma.

Teniendo en cuenta un enfoque histórico de las matemáticas, la estimación de la complejidad algorítmica del mismo objeto podría cambiar, entonces ¿para qué hablar de complejidad algorítmica absoluta? Con el descubrimiento de nuevas matemáticas, la estimación de la complejidad algorítmica podría cambiar, lo cual obligaría a dejar de lado la idea de una complejidad algorítmica absoluta. Kolmogorov, como vimos, creía que el elemento mínimo existía, y era absoluto, pero si el estimado elemento mínimo cambia con nuevos conocimientos matemáticos —y siempre vendrán nuevos conocimientos—, entonces, la idea de la complejidad algorítmica absoluta pierde su validez. De pronto, la complejidad algorítmica absoluta podría ser cierta en un tiempo histórico particular; no obstante, en un tiempo así, nadie conoce todos los teoremas matemáticos que pueden conducir al mismo objeto. En una época, se podría llegar al mismo objeto por medio de programas de longitudes diferentes, lo cual cambiaría la complejidad del objeto negando la pretensión de complejidad absoluta.

2.1.2 Complejidad algorítmica y geometrías euclidiana, y no euclidianas

Las geometrías de Euclides, Lobachevski y Riemann parten de cuatro postulados semejantes, pero difieren en el quinto postulado: el quinto postulado de Euclides indica que por un punto externo a una recta de un plano, sólo puede trazarse una única paralela; en Lobachevski, el quinto postulado indicaría que "por cualquier punto del plano pueden trazarse *dos rectas* paralelas a una recta dada"[25]; por su parte, Riemann diría: por cualquier punto del plano *no* puede trazarse una paralela a una recta dada[26].

A partir de aquí, y sin contradicciones, se puede llegar a diferentes teoremas[27]. Por ejemplo, en Euclides se puede llegar al teorema que indica que todo triángulo tiene dos ángulos rectos (180º) como suma de sus ángulos internos. En Lobachevski, el teorema diría que la suma de los ángulos internos del triángulo serían menores a dos rectos (menores a 180º). Y en Riemann, la suma de los ángulos internos del triángulo serían mayores a dos rectos (mayores a 180º).

En la geometría de Lobachevski, al disminuir el área del triángulo, aumenta la suma de los ángulos internos. En el límite, se tendría el triángulo de Euclides (la suma de los ángulos internos del triángulo equivale a dos rectos)[28]. En la geometría de Riemann, al disminuir el área del triángulo, disminuye la suma de los ángulos internos. En el límite, se tendría el triángulo de Euclides[29].

Si tomamos como objeto al triángulo de Euclides (su versión binaria), y buscamos llegar a él a partir de los postulados de las tres geometrías mencionadas, se tendrían que recorrer tres caminos diferentes, en la medida en que estas geometrías (aunque tienen algunos teoremas semejantes), tienen otros teoremas diferentes. Las dos geometrías no euclídeas satisfacen sólo los cuatro primeros postulados de la de Euclides, pero no cumplen con el quinto postulado de Euclides, y postulan cosas diferentes entre ellas (las no euclidianas).

La diferente formulación del quinto postulado en los tres casos marca una gran diferencia entre estas tres geometrías. Además, el segundo postulado de Euclides es diferente al de Riemann: en Euclides se puede prolongar un segmento de recta a una recta de longitud infinita; en Riemann, se puede recorrer una recta –que en

25 KASNER, Edward y NEWMANN, James. Matemáticas e imaginación. Primera edición en QED [en línea]. México: Libraria S.A., Consejo Nacional para la cultura y las artes. 2007. p. 107. [Fecha de consulta: enero de 2011]. Disponible desde: http://books.google.com/books?id=zdBHMHV3m5YC&pg=PA103&hl=es&source=gbs_selected_pages&cad=3#v=onepage&q&f=false

26 LLOMBART, José. Bosquejo histórico de las geometrías no euclídeas: antecedentes, descubrimiento, difusión, consistencia, modelos, aplicaciones físicas... [en línea]. (s.f). p. 56. [Fecha de consulta: enero de 2011]. Disponible desde: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_details&gid=457&Itemid=75

27 KASNER, Edward y NEWMANN, James. Op. cit., p. 109.

28 DELGADO, Ana. Apuntes sobre las geometrías no–euclídeas. Seminario de Matemáticas, J. B. Villalba Hervás. La Oratova de Historia de la Ciencia – año III. [en línea]. (s.f). p. 383. [Fecha de consulta: enero de 2011]. Disponible desde: http://www.gobcan.es/educacion/3/usrn/fundoro/archivos%20adjuntos/publicaciones/actas/actas3_1996/a3c014w.pdf

29 LLOMBART, José. Op. Cit., p. 56.

Riemann es una curva- infinitas veces, pero la recta resulta ser finita.

En otras palabras, y si pensamos en la complejidad algorítmica del mismo objeto (el triángulo de Euclides), tendríamos que reconocer que, para cada una de estas tres geometrías, los programas mínimos computacionales serían diferentes. Es decir, tendríamos tres complejidades algorítmicas. De nuevo, un seguidor de la idea de la complejidad algorítmica absoluta podría aseverar que la complejidad algorítmica del triángulo de Euclides corresponde a aquella que sea menor en los tres casos; pero, otra vez, vendría el argumento histórico: el programa mínimo cambiaría con los nuevos descubrimientos geométricos, es decir, la complejidad algorítmica de un objeto no es independiente de las teorías que permiten construirlo. Incluso uno podría preguntarse si se está hablando del mismo triángulo de Euclides, construido desde las tres diferentes geometrías.

Los dos ejemplos anteriores nos indican que podría no haber una complejidad y universal y absoluta. No es universal, pues no existe un único computador universal que tenga todos los programas de computador, en un momento histórico, relacionados con el objeto en cuestión; y no es absoluta (absoluta en el sentido de que sólo existe un programa mínimo, con base en el cual se estima la complejidad algorítmica del objeto en cuestión), pues podrían aparecer nuevos programas mínimos que cambiarían (reducirían) la complejidad algorítmica del objeto en cuestión.

Se decía más arriba que puede haber una enumeración universal recursiva de los programas autodelimitantes de computador. Con esto podremos construir una máquina de Turing universal (T) o computador universal (U), que puede calcular cualquier cadena binaria a partir del index o numeral del programa de computador que le corresponde a la cadena binaria en cuestión. El computador o máquina de Turing con un programa autodelimitante es equivalente a la función parcial recursiva referida[30].

Definición:

> The partial recursive function $\mathbf{v}^{(n+1)}(i, x_1, \ldots, x_n)$ is *universal* for all *n*-place partial recursive function, if for each partial recursive function $\Phi^{(n)}(x_1, \ldots , x_n)$ there exists an *i* such that the mapping $\mathbf{v}^{(n+1)}$ with the first argument fixed to *i* is identical to the mapping $\Phi^{(n)}$. For each *n*, we fix a partial recursive *(n + 1)* place function that is universal for all *n*-place parcial recursive functions[31].

Lo que podemos extraer de esta definición, es que podríamos tener una enumeración para funciones recursivas de n variables. Esa enumeración sería universal para las funciones parciales recursivas de n variables, pero dejaría de serlo para funciones de n + j variables y no podría ser la función recursiva universal para funciones recursivas de n – k variables. Supóngase que se descubren nuevas funciones recursivas de n, o de n + j variables o de n – k variables, que permiten construir el objeto de nuevas formas. Dentro de este conjunto de funciones nuevas, sería posible encontrar nuevas funciones recursivas que, para el número específico de variables (n – k, n, o n + j), permitirían el cálculo del el objeto en cuestión (su cadena binaria). En cualquier caso, la complejidad algorítmica podría cambiar, unas veces aumentando (y, en este caso, la complejidad algorítmica del objeto sería la del programa mínimo que ya existía, y no la del nuevo), otras disminuyendo. Si disminuye, entonces, la complejidad algorítmica del objeto habrá cambiado. Es decir, la llamada enumeración universal no puede ser tan universal. Quedarían por fuera de su espectro de enumeración

[30] CHAITIN, Gregory. Op. cit., 1975. p. 331.
[31] LI, Ming y VITÁNYI, Paul. Op. cit., p. 31.

muchísimas funciones parciales recursivas (o si hablamos de programas de computador, quedarían por fuera muchísimos programas de computador en la enumeración de los programas de computador), alguna de las cuales podría significar una baja en la complejidad algorítmica, con relación a la complejidad algorítmica que se tenía antes. Entonces, podríamos decir que la pretendida universalidad es restringida; no es universal en el sentido más estricto de la palabra. Sólo es "universal" durante el período de tiempo en el cual no aparece una nueva complejidad algorítmica. En otras palabras, no podría considerársela universal. Tampoco absoluta, pues podrían aparecer programas de computador, no tenidos en cuenta en la enumeración considerada universal, que permitieran reducir la complejidad algorítmica del objeto en cuestión.

Lo anterior significaría que, desde la enumeración de funciones recursivas de n variables, podría haber funciones parciales recursivas de igual, menos o más variables que me permitiera calcular el objeto matemático en cuestión "más fácilmente" que con aquella función de n variables con la cual se calculaba el mismo objeto. Esto significa que la complejidad algorítmica variaría. En otras palabras, si una máquina universal de Turing tiene una enumeración de programas de computador, y uno de esos programas resulta ser el mínimo para el objeto en cuestión, entonces esa será la complejidad algorítmica del objeto. Pero sólo hasta ese momento. Si aparecen nuevos programas para calcular el objeto, es posible que uno de ellos sea más conciso que el anterior. Con ello, la complejidad algorítmica del objeto cambiaría (bajaría), y se vería que no es absoluta y universal.

Lo anterior (nuevos programas de computador no incluidos en la enumeración del computador o máquina de Turing universal) se relaciona con la existencia de programas que permitan construir un objeto matemático a partir de programas más largos que si se acudiera a nuevos teoremas dentro de programas más cortos para calcular el mismo objeto matemático. En este último caso, la complejidad algorítmica sería menor en el segundo caso.

De esta misma opinión es Murray Gell-Mann, quien sostiene que (él habla de contenido de información algorítmica en el sentido de la complejidad algorítmica):

> the algorithmic information content of a long bit string can readily be shown to be less than or equal to some value. But for any such value there is no way of excluding the possibility that the AIC could be lower, reduced by some as yet undiscovered theorem revealing a hidden regularity in the string[32].

En palabras nuestras, la complejidad algorítmica de un objeto matemático no es una propiedad del objeto, como se pretendió en un comienzo al formular la propuesta de la complejidad algorítmica, sino que, también, depende de las teorías con que se describa el objeto en cuestión.

En consecuencia, el primer resultado al que llegamos a partir de las anteriores discusiones es el siguiente: **no es posible hablar de una complejidad algorítmica absoluta y universal**.

2.2 Complejidad computacional

En la complejidad computacional "cualquier máquina de Turing de k-cintas, ejecutando en un tiempo t(n) puede ser simulada por una máquina de Turing con sólo una cinta de trabajo ejecutando en un tiempo $t^2(n)$"[33]. Esto significa que la complejidad computacional necesaria para

[32] GELL-MANN, Murray. What is complexity? Reprinted with permission from *John Wiley and Sons, Inc.: Complexity, Vol. 1, no. 1,* 1995 [en línea]. 9p. [Fecha de consulta: enero de 2011]. Disponible desde: http://es.scribd.com/doc/7887206/COMPLEXITY-by-Murray-Gell-Mann

[33] LI, Ming and VITÁNYI, Paul. Op. cit., p. 37.

resolver el problema en cuestión no es absoluta: puede cambiar con el cambio de computador.

La complejidad computacional no tiene pretensiones universales (por eso no acude al computador universal o máquina universal de Turing), ni de ser absoluta, por esto no requiere del programa mínimo que le permite a un computador universal encontrar la versión binaria de la solución del problema planteado. Debido a lo anterior, podemos llegar a un segundo resultado bastante fácil, que se desprende de las propias definiciones y teoremas de la complejidad computacional: **la complejidad computacional no es universal ni absoluta**.

2.3 Profundidad lógica

La profundidad lógica, como se dijo más arriba, es el número necesario de pasos en la trayectoria causal o deductiva que conecta un objeto con su plausible origen, o formalmente, es el tiempo requerido por un computador universal para calcular el objeto a partir de su descripción original comprimida.

La profundidad lógica fue propuesta por C. Bennett para tratar de "atrapar" la complejidad de sistemas considerados, desde el punto de vista intuitivo, como complejos; es decir, intuitivamente, los sistemas aleatorios, como un gas de Boltzmann, no son complejos (así su complejidad algorítmica sea alta), en tanto que un cristal puro tampoco será complejo, sino más bien, ordenado. Los sistemas complejos, podemos decir con Bennett, resultan de procesos autoorganizativos[34], lo que los ubican a medio camino de los mencionados extremos. Ejemplo claro de sistemas complejos, es decir, aquellos que coinciden con nuestra intuición, son los seres vivos.

Veamos ahora, si la propuesta de encontrar la profundidad lógica (complejidad) de sistemas como los seres vivos, puede resultar universal y absoluta. La profundidad lógica acude a la complejidad computacional (tiempo requerido…, o espacio requerido…), y a la complejidad algorítmica (computador universal y descripción original comprimida), con ello, recupera, por un lado, la universalidad y lo absoluto de la complejidad algorítmica, tratando de evitar, por el otro lado, la identificación de la complejidad con la entropía de los ensambles termodinámicos (que es lo sucede con la complejidad algorítmica, y que fue percibido por primera vez por el mismo C. Bennett[35]).

Supóngase que estamos interesados en la complejidad (profundidad lógica) de un organismo determinado, un mamífero por ejemplo. Si hablamos del más plausible origen como su posible origen evolutivo, tendríamos que podríamos efectuar dos posibles descripciones del referido organismo: una, la ontogénica, y otra la filogenética.

E. Haeckel en su tiempo, pensaba que la ontogenia era una simple recapitulación de la filogenia. No obstante, actualmente, se considera a la ontogenia como una versión recortada y modificada de la filogenia, esto debido, en buena parte, a las llamadas adaptaciones al medio embrionario (o al medio particular del organismo que empieza a desarrollarse), el cual no tiene contrapartida en el medio en el cual transcurre la filogenia. De esta manera, si partimos de una determinada etapa inicial de la filogenia del mamífero en cuestión, y si correspondientemente, partimos de la etapa embrionaria que, aproximadamente, le correspondiera a esa etapa inicial de la línea filogenética, tendríamos que el computador universal, partiendo de (aproximadamente) el mismo plausible origen, calculará dos

[34] BENNETT, Charles. How to define complexity in physics, and why. En: ZUREK, Wojciech H. (Editor). Complexity, entropy and the Physical of Information. California: Adisson-Wesley, 1990. p. 137.

[35] BENNETT, Charles. The thermodynamics of computation - a review. *Int. J. Theor. Phys.*, 21 (12): 905-940, 1982.

profundidades lógicas (dos complejidades) diferentes: una para la secuencia filogenética, y otra para el desarrollo ontogénico del organismo; y esto debido a que, muy probablemente, el cálculo del organismo por la vía filogenética requerirá de un mayor tiempo computacional (mayor profundidad lógica o complejidad) que el que se requeriría el desarrollo embrionario del mismo organismo (menor profundidad lógica o complejidad), debido a que la ontogenia es una versión recortada (y modificada) de la filogenia. El mismo organismo, entonces, tendría dos profundidades lógicas (dos complejidades) completamente diferentes, lo cual resulta estar en contradicción con una medida universal y absoluta de la profundidad lógica (o complejidad).

Aun así, tal vez replicaría Bennett, podríamos elegir sólo la vía filogenética para hacer el cálculo de la profundidad lógica. No obstante, aquí aparecería un nuevo problema: pueden existir distintas teorías filogenéticas para los mismos organismos, lo cual llevaría, de nuevo, a afirmar que habría profundidades lógicas diferentes para el mismo organismo. Y esto es completamente diferente a lo que se esperaba con la profundidad lógica: encontrar una profundidad lógica universal y absoluta (complejidad universal y absoluta) de los sistemas complejos teniendo como base teórica el computador universal y el programa mínimo. La profundidad lógica hereda de la complejidad algorítmica su dependencia de la teoría desde donde se construye el objeto en cuestión que lleva a la descripción o programa mínimo del mismo. Entonces, llegamos al tercer resultado de nuestro trabajo: **la profundidad lógica no puede ser absoluta y universal**.

2.4 Profundidad termodinámica

El problema con la profundidad termodinámica es, como lo percibieron los mismos J. Crutchfield y C. R. Shalizi en el citado artículo, es que en la elección de los estados hay un aspecto de arbitrariedad. C. Bennett[36] decía, con relación a la profundidad termodinámica, que estados triviales se pueden alcanzar a través de mucha disipación, y que estados complejos pueden alcanzarse con una disipación menor. Si elegimos un estado de partida diferente en dos casos, tendremos dos profundidades termodinámicas diferentes. Si consideramos diferentes estados en la trayectoria que lleven al mismo estado final, tendremos diferentes profundidades termodinámicas. Argumentaciones como estas muestran que no es posible hablar de la profundidad termodinámica en términos absolutos y universales. Ese sería nuestro fácil cuarto resultado: **no es posible hablar de una profundidad termodinámica absoluta y universal**.

2.5 Sobre la conmensurabilidad de las diferentes definiciones de complejidad aquí referidas

Podríamos preguntarnos, finalmente, lo siguiente: ¿es posible calcular la complejidad de un tipo (algorítmica, computacional, etc.) a partir de la complejidad de otro tipo (Profundidad lógica, termodinámica, etc.)? En este punto, debemos recordar el llamado **Teorema de la no computabilidad:** La función K(x) no es parcial recursiva[37]. Esto viene a significar que no es posible calcular la complejidad algorítmica cadenas binarias no simples, sólo estimarlas (simples como, por ejemplo, la complejidad algorítmica de la cadena binaria 0). De hecho, y como lo había dicho Kolmogorov[38], esta teoría, para tener sentido, debe referirse a cadenas binarias suficientemente largas. Aquí nos estamos refiriendo a sistemas complejos adaptativos que involucran procesos irreversibles, emergencia de propiedades y autoorganización (más específicamente, nos referimos a las representaciones lexicográficas binarias de estos sistemas).

[36] BENNETT, Charles. Op. cit., 1990. pp. 137–148.

[37] LI, Ming y VITÁNYI, Paul. Op. cit., p. 216.

[38] KOLMOGOROV, Andréi. Op. cit., p. 7.

Si la función K no es parcial recursiva, no podremos calcular la complejidad de cadenas binarias correspondientes a modelos computacionales de sistemas complejos, lo que podemos es estimar la complejidad del modelo codificado lexicográficamente.

Entonces, si no podemos calcular la complejidad algorítmica del objeto 1, ni la del objeto 2, tampoco podríamos calcular la complejidad del objeto 2 a partir de la complejidad del objeto 1 ni lo contrario. Es dentro de esta imposibilidad de cálculo de una complejidad a partir de la otra que hablamos de inconmensurabilidad entre estas dos complejidades.

Para lo que sigue, vamos a suponer, en aras de la discusión, que un (aproximadamente) mismo objeto puede tener una complejidad algorítmica, una complejidad computacional (aunque ésta se refiera más a funciones), una profundidad lógica y una profundidad termodinámica determinadas. Considerando los resultados de la estimación de la complejidad algorítmica de un objeto, y comparando este resultado con la complejidad computacional veríamos que no serían comparables debido a que esas complejidades del objeto dependen de diferentes procesos para estimarlas: en un caso, se acude al programa mínimo según el computador universal, y el otro se acude a los recursos en tiempo o espacio para alcanzar la solución del problema. Dadas las diferentes formas de estimar la complejidad del (aproximadamente) mismo objeto, esos resultados resultarían inconmensurables entre sí, en el sentido arriba referido: a partir de una forma de estimar la complejidad particular (algorítmica, por ejemplo) de un (aproximadamente) mismo objeto, no podremos calcular otra forma de complejidad (computacional, por ejemplo).

Ahora bien, si comparamos la estimación de la complejidad algorítmica con la profundidad lógica de un (aproximadamente) mismo objeto, llegaríamos a que no se pueden comparar debido a que para la estimación de la complejidad según la profundidad lógica se habla de tiempo de computación, el cual no tiene contrapartida en la complejidad algorítmica. Es decir, las dos formas de estimar la complejidad serán diferentes, con lo cual no se podría calcular la complejidad según la estimación de la profundidad lógica. Como se mencionó, la complejidad algorítmica está más relacionada con la entropía de ensambles termodinámicos que con lo que intuitivamente se considera complejidad de los llamados sistemas complejos adaptativos. En este segundo caso, la complejidad algorítmica y la profundidad lógica de un (aproximadamente) mismo objeto, resultarían inconmensurables (en el sentido ya referido) entre sí: de la estimación de la complejidad algorítmica de un (aproximadamente) mismo objeto, no podremos calcular la profundidad lógica del (aproximadamente) mismo objeto.

En tercer lugar, si comparamos la complejidad algorítmica con la profundidad termodinámica de un (aproximadamente) mismo objeto, llegaríamos a que no se pueden comparar debido a las diferentes formas de estimar la complejidad: en un caso, otra vez, es el programa mínimo en un computador universal, y en otro la entropía e información de una trayectoria de estados. Estas dos formas de estimar la complejidad serían inconmensurables entre sí, en el sentido ya referido.

Por otro lado, y hablando sólo en términos computacionales, no se puede intentar una "unificación" diciendo que una medida de complejidad (algorítmica, por ejemplo) es una función recursiva f que podríamos sumar a otra función recursiva g correspondiente, por ejemplo, a la profundidad lógica, porque la complejidad algorítmica y la profundidad lógica no son funciones recursivas.

A resultados similares se podría llegar si comparamos pares diferentes de estimar la complejidad (por ejemplo, complejidad computacional y profundidad termodinámica, etc.).

En general, y debido a las tan diferentes formas de estimar la complejidad, **todas dependientes directamente de sus correspondientes definiciones de complejidad**, podemos decir que, por lo menos para los cuatro casos estudiados –complejidad algorítmica, complejidad computacional, profundidad lógica y profundidad termodinámica- las estimaciones de las complejidades de un (aproximadamente) mismo objeto resultan inconmensurables entre sí, en el sentido referido.

En consecuencia, llegamos al quinto resultado de este trabajo:

Las cuatro formas estudiadas de estimar la complejidad de un (aproximadamente) mismo objeto, serían inconmensurables entre sí.

Esto nos lleva al el último escalón del presente trabajo: si nos alejamos de las no formales y encomiásticas propuestas de tipo divulgativo, alrededor del problema de la complejidad -que sugieren que puede haber una teoría unificada de la complejidad de los llamados sistemas complejos adaptativos, y que parecen prometer mucho y encontrar poco-, y considerando que la estimación de las complejidades de un (aproximadamente) mismo objeto resultan inconmensurables entre sí, podemos pasar a repasar las cuatro definiciones de complejidad.

La complejidad algorítmica habla de la longitud del programa mínimo que le permite al computador universal calcular una cadena binaria s; esa será la complejidad algorítmica de s. Esta definición supone que existe un único programa mínimo, y por eso se habla de complejidad absoluta. La definición mencionada acude al computador universal, por lo cual se habla de complejidad universal. Por su parte, la complejidad computacional habla de tiempo o de espacio utilizado por una máquina de Turing para resolver un problema. Estas dos definiciones de complejidad implican "elementos" diferentes: en el primer caso, se exige el programa mínimo, y el computador (máquina de Turing) universal, en el segundo, la máquina de Turing no es universal, ni se habla de un programa mínimo; por tanto, no podríamos unificar estas dos teorías en una sola, pues parten de "elementos" diferentes.

La tercerea definición de complejidad, la profundidad lógica es una especie de "síntesis" entre las dos anteriores definiciones de complejidad: se habla de tiempo de computación, a partir del más plausible origen del objeto en cuestión, utilizando un computador universal. La profundidad lógica no se podría unificar con la complejidad algorítmica, por un lado, pues habla de tiempo de computación (en la complejidad algorítmica no se habla de tiempo de computación), ni se podría unificar con la complejidad computacional, pues también va más allá de esta última (recurre al programa mínimo, y al computador universal). Además, y como lo dice el mismo Bennett, la complejidad computacional tiene más que ver con funciones que con la complejidad de los llamados sistemas complejos[39].

Por último, estaría la profundidad termodinámica: como lo citamos más arriba, la profundidad termodinámica de un estado s es proporcional a la cantidad de información que se necesita para identificar la trayectoria que lleva a s, dada la información que se tiene sobre que el sistema esté en el estado s. Esta definición hace referencia a la información en el sentido de entropía de los sistemas físicos. Tal vez, en un primer instante, se podría pensar en que podría relacionares con la complejidad algorítmica, si se tiene en cuenta que está última puede relacionarse con -como ya lo dijimos con Bennett- la entropía de ensambles termodinámicos. Aun así, no podrían compararse debido a que la profundidad

[39] BENNETT, Charles. Op. cit., 1990. p. 141.

termodinámica se refiere a la complejidad de los llamados sistemas complejos (y para ello habla de producción de entropía, en el sentido de disipación, para alcanzar un estado a partir de otro estado considerado como inicial), no a la entropía del sistema. En esta medida, no podríamos hablar de una unificación entre la profundidad termodinámica y la profundidad lógica.

De otra parte, y de nuevo, la profundidad termodinámica se refiere a producción de entropía (disipación) en una trayectoria que desemboca en el estado buscado, lo cual no tiene una contrapartida en la complejidad computacional: ésta se refiere a tiempos o espacios de computación en una máquina de Turing. En este sentido, tampoco podríamos unificar estas dos definiciones de complejidad.

Por último, veamos la profundidad lógica y la profundidad termodinámica. Las dos definiciones mencionadas parten de "elementos" diferentes: en el caso de la profundidad lógica, se acude al tiempo empleado por un computador universal para calcular el objeto en cuestión a partir de su más plausible origen. En la profundidad lógica se habla de entropía generada (disipación) en una trayectoria que lleva del estado (aparentemente) inicial, al estado final. La primera definición es computacionalmente dependiente, en tanto que la segunda no es computacionalmente dependiente pues no recurre a ningún tipo de máquina de Turing, únicamente habla de producción de entropía (disipación) en una trayectoria determinada. Esto hace que no podamos hablar de una unificación entre ellas.

La discusión anterior se puede sintetizar de la siguiente manera: cada una de las cuatro definiciones de complejidad consideradas, parten de "elementos" diferentes a las de las otras tres, lo cual hace que no se pueda buscar una teoría universal que cobije a las cuatro definiciones. Si se buscara una definición universal que las cobijara, tocaría hablar en términos tan generales que no se podría ir de allí hacia las definiciones específicas de complejidad aquí referidas.

Las dos anteriores discusiones: la de la inconmensurabilidad entre las diferentes formas de estimar la complejidad correspondientes a las cuatro definiciones de complejidad que se estudiaron, y las diferencias conceptuales entre las cuatro definiciones de complejidad referidas, nos llevarían al último resultado: **debemos aceptar que no es posible encontrar una teoría unificada de la complejidad de los llamados sistemas complejos adaptativos: las diferentes formas de estimar la complejidad de un (aproximadamente) mismo objeto son inconmensurables entre sí; las definiciones de complejidad estudiadas no se pueden unificar entre sí, lo que hace imposible la búsqueda de una teoría unificada de la complejidad, por lo menos para los cuatro casos estudiados**.

Creemos que, si se consideraran otras definiciones de complejidad diferentes a las aquí estudiadas, se podría llegar a resultados análogos a los que aquí se llegó. Hasta ahora no se ha dado el caso de una teoría de la complejidad de los llamados sistemas complejos adaptativos que pueda ser considerada como unificada. Pensamos que esto se debe, otra vez, a razones análogas a las aquí discutidas. Todo eso nos hace suponer que no es posible construir complejidades absolutas y universales, ni una teoría unificada de la complejidad de los llamados sistemas complejos adaptativos.

Estos resultados nos pueden hacer pensar en diferentes teorías científicas (o saberes) y la posibilidad de unificarlas(los) en una teoría universal. Podríamos pensar, por ejemplo, si diferentes propuestas bioéticas se pueden unificar en una teoría bioética universal, como de hecho, se hace en un artículo del mismo autor más adelante en este número.

Bioética

3. Conclusiones

- No es posible hablar de una complejidad algorítmica, ni de una complejidad computacional, ni de una profundidad lógica, ni de una profundidad termodinámica, universales y absolutas.

- Los resultados del cálculo de la complejidad de un (aproximadamente) mismo objeto a partir de las cuatro definiciones de complejidad resultan inconmensurables entre sí.

- No es posible hablar de una teoría unificada de la complejidad para los llamados sistemas complejos adaptativos, por lo menos a partir de las cuatro definiciones de complejidad aquí estudiadas.

Bibliografía

1. BENNETT, Charles. How to define complexity in physics, and why. En: ZUREK, Wojciech H. (Editor). Complexity, entropy and the Physical of Information. California: Adisson-Wesley, 1990. pp. 137–148.

2. _______________. Logical depth and physical complexity. En: HERKEN, Rolf (Ed). The universal Turing Machine: a half century survey. Oxford: Oxford University Press, 1988. pp. 227–258.

3. _______________. The thermodynamics of computation - a review. *Int. J. Theor. Phys.*, 21 (12): 905-940, 1982.

4. CHAITIN, Gregory. Algorithmics information theory. 3rd printing (with revisions). Cambridge: Cambridge University Press, Cambridge, 1990. 234p.

5. _______________. A theory of program size formally identical to information. *J. Assoc. Comput.* Mach., 22 (3): 229-340, 1975.

6. COWAN, George. Conference Opening Remarks. En: COWAN, George; PINES, David y MELTZER, David (Eds). Complexity: metaphors, models, and reality. Cambridge: Perseus Books, Cambidge, 1999. pp. 1–4.

7. COWAN, George; PINES, David y MELTZER, David (Eds). Complexity: metaphors, models, and reality. Cambridge: Perseus Books, Cambidge, 1999. 781p.

8. CRUTCHFIELD, James y SHALIZI, Cosma. Thermodynamic depth of causal states: objective complexity via minimal representations. *Physical Review E,* 59 (1): 1999, pp. 59-60.

9. DELGADO, Ana. Apuntes sobre las geometrías no–euclídeas. Seminario de Matemáticas, J. B. Villalba Hervás. La Oratova de Historia de la Ciencia – año III. [en línea]. (s.f). pp. 355–395. [Fecha de consulta: enero de 2011]. Disponible desde: http://www.gobcan.es/educacion/3/usrn/fundoro/archivos%20adjuntos/publicaciones/actas/actas3_1996/a3c014w.pdf

10. GELL-MANN, Murray. What is complexity? Reprinted with permission from John Wiley and Sons, Inc.: Complexity, Vol. 1, no. 1, 1995 [en línea]. 9p. [Fecha de consulta: enero de 2011]. Disponible desde: http://es.scribd.com/doc/7887206/COMPLEXITY-by-Murray-Gell-Mann

11. HERKEN, Rolf (Ed). The universal Turing Machine: a half century survey. Oxford: Oxford University Press, 1988. 611p.

12. HOLLAND, John. Hidden order: how adaptation builds complexity. Massachusetts: Perseus Books. 1995. 208p.

13. HORGAN, John. De la complejidad a la perplejidad. *Investigación y Ciencia* (227): 71–77, 1995.

14. KASNER, Edward y NEWMANN, James. Matemáticas e imaginación. Primera edición en QED [en línea]. México: Libraria S.A., Consejo Nacional para la cultura y las artes. 2007. 272p. [Fecha de consulta: enero de 2011]. Disponible desde: http://books.google.com/books?id=zdBHMHV3m5YC&pg=PA103&hl=es&source=gbs_selected_pages&cad=3#v=onepage&q&f=false

15. KAUFFMAN, Stuart. Investigations. Oxford: Oxford University Press, 2000. p. 2.

16. KOLMOGOROV, Andréi. Three approaches to the quantitative definition of information. *Problemy Pederachi Informatsii,* IT-14 (5): 1965, p. 7.

17. LI, Ming y VITÁNYI, Paul. An introduction to Kolmogorov complexity and its applications. Tercera edición. New York: Springer, 2008. 709p.

18. LLOMBART, José. Bosquejo histórico de las geometrías

no euclídeas: antecedentes, descubrimiento, difusión, consistencia, modelos, aplicaciones físicas... [en línea]. (s.f). [Fecha de consulta: enero de 2011]. Disponible desde: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_details&gid=457&Itemid=75

19. LLOYD, Seth y PAGELS, Heinz. Complexity as thermodynamics depth. *Ann. Phys.* 188 (1): 1988, p. 189.

20. WACKERBAUER, R., et. all. A comparative classification of complexity measures. *Chaos, Solitons and Fractals,* 4, (1): 133–173, 1994.

21. WATANABLE, Osamu. Kolmogorov complexity and computational complexity. New York: Springer-Verlag, 1992. 105p.

22. ZUREK, Wojciech H. (Editor). Complexity, entropy and the Physical of Information. California: Adisson-Wesley, 1990. 544p.